**第三讲离散型随机变量及其分布列、均值与方差**

id:2147491548;FounderCES

题组 求离散型随机变量的分布列、均值与方差

1*.*[2017浙江,8,4分]已知随机变量*ξi*满足*P*(*ξi=*1)*=pi*,*P*(*ξi=*0)*=*1*-pi*,*i=*1,2*.*若0*<p*1*<p*2*<*,则()

A.*E*(*ξ*1)*<E*(*ξ*2),*D*(*ξ*1)*<D*(*ξ*2) B.*E*(*ξ*1)*<E*(*ξ*2),*D*(*ξ*1)*>D*(*ξ*2)

C.*E*(*ξ*1)*>E*(*ξ*2),*D*(*ξ*1)*<D*(*ξ*2) D.*E*(*ξ*1)*>E*(*ξ*2),*D*(*ξ*1)*>D*(*ξ*2)

2*.*[2013湖北,9,5分][理]如图13*-*3*-*1,将一个各面都涂了油漆的正方体,切割为125个同样大小的小正方体*.*经过搅拌后,从中随机取一个小正方体,记它的涂漆面数为*X*,则*X*的均值*E*(*X*)*=* ()

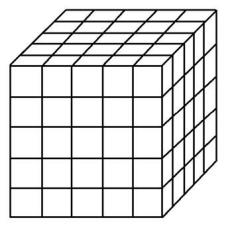


图13*-*3*-*1

A. B. C. D.

3*.*[2014浙江,12,4分][理]随机变量*ξ*的取值为0,1,2*.*若*P*(*ξ=*0)*=*,*E*(*ξ*)*=*1,则*D*(*ξ*)*=　　　.*

4*.*[2016山东,19,12分][理]甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动,每轮活动由甲、乙各猜一个成语,在一轮活动中,如果两人都猜对,则“星队”得3分;如果只有一人猜对,则“星队”得1分;如果两人都没猜对,则“星队”得0分*.*已知甲每轮猜对的概率是,乙每轮猜对的概率是;每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响,各轮结果亦互不影响*.*假设“星队”参加两轮活动,求:

(Ⅰ)“星队”至少猜对3个成语的概率;

(Ⅱ)“星队”两轮得分之和*X*的分布列和数学期望*EX.*

id:2147491569;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018惠州市二调,19]某学校为了丰富学生的课余生活,以班级为单位组织学生开展古诗词背诵比赛,随机抽取一首,背诵正确加10分,背诵错误减10分,且背诵结果只有“正确”和“错误”两种*.*其中某班级学生背诵正确的概率*p=*,记该班级完成*n*首背诵后的总得分为*Sn.*

(1)求*S*6*=*20且*Si*≥0(*i=*1,2,3)的概率;

(2)记*ξ=|S*5*|*,求*ξ*的分布列及数学期望*.*

2*.*[2018广东七校第一次联考,19]某中药种植基地有两处种植区的药材需在下周一、下周二两天内采摘完毕,基地员工一天可以完成一处种植区的采摘,下雨会影响药材品质,基地收益如下表所示:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 周一 | 无雨 | 无雨 | 有雨 | 有雨 |
| 周二 | 无雨 | 有雨 | 无雨 | 有雨 |
| 收益 | 20万元 | 15万元 | 10万元 | 7*.*5万元 |

若基地额外聘请工人,可在下周一当天完成全部采摘任务*.*无雨时收益为20万元;有雨时,收益为10万元*.*额外聘请工人的成本为*a*万元*.*

已知下周一和下周二有雨的概率相同,两天是否下雨互不影响,基地收益为20万元的概率为0*.*36*.*

(1)若不额外聘请工人,写出基地收益*X*的分布列及基地的预期收益;

(2)该基地是否应该额外聘请工人,请说明理由*.*

3*.*[2017长沙市五月模拟,18]某班级50名学生的考试分数*x*分布在区间[50,100)内,设考试分数*x*的分布频率是*f*(*x*)且*f*(*x*)*=*考试成绩采用“5分制”,规定:考试分数在[50,60)内的成绩记为1分,考试分数在[60,70)内的成绩记为2分,考试分数在[70,80)内的成绩记为3分,考试分数在[80,90)内的成绩记为4分,考试分数在[90,100)内的成绩记为5分*.*在50名学生中用分层抽样的方法,从成绩为1分,2分及3分的学生中随机抽出6人,再从这6人中随机抽出3人,记这3人的成绩之和为*ξ*(将频率视为概率)*.*

(1)求*b*的值,并估计该班的考试平均分数;

(2)求*P*(*ξ=*7);

(3)求*ξ*的分布列和数学期望*.*

**B组提升题**

4*.*[2018南昌市调考,18]微信已成为人们常用的社交软件,“微信运动”是微信里由腾讯开发的一个类似计步数据库的公众号*.*手机用户可以通过关注“微信运动”公众号查看自己每天行走的步数,同时也可以和好友进行运动量的PK或点赞*.*现从小明的微信好友中随机选取40人(男、女各20人),记录他们某一天行走的步数,并将数据整理如下表:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 步数  性别 | 0*~*  2 000 | 2 001*~*  5 000 | 5 001*~*  8 000 | 8 001*~*  10 000 | *>*10 000 |
| 男 | 1 | 2 | 4 | 7 | 6 |
| 女 | 0 | 3 | 9 | 6 | 2 |

(1)若某人一天行走的步数超过8 000步被评定为“积极型”,否则被评定为“懈怠型”,根据题意完成下面的 2*×*2列联表,并据此判断能否有90*%*的把握认为“评定类型”与“性别”有关?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 积极型 | 懈怠型 | 总计 |
| 男 |  |  |  |
| 女 |  |  |  |
| 总计 |  |  |  |

(2)在小明这40位好友中,从该天行走的步数超过 10 000步的人中随机抽取3人,设抽取的女性有*X*人,求*X*的分布列及数学期望*E*(*X*)*.*

附:*K*2*=*,

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P*(*K*2≥*k*0) | 0*.*10 | 0*.*05 | 0*.*010 | 0*.*005 | 0*.*001 |
| *k*0 | 2*.*706 | 3*.*841 | 6*.*635 | 7*.*879 | 10*.*828 |

5*.*[2017合肥市三模,18]某供货商计划将某种大型节日商品分别配送到甲、乙两地销售*.*据以往数据统计,甲、乙两地该商品需求量的频率分布表如下:

甲地需求量频率分布表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 需求量 | 4 | 5 | 6 |
| 频率 | 0*.*5 | 0*.*3 | 0*.*2 |

乙地需求量频率分布表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 需求量 | 3 | 4 | 5 |
| 频率 | 0*.*6 | 0*.*3 | 0*.*1 |

以两地需求量的频率作为两地需求量的概率*.*

(1)若此供货商计划将10件该商品全部配送至甲、乙两地,保证两地不缺货(配送量≥需求量)的概率均大于0*.*7,问该商品的配送方案有哪几种?

(2)已知甲、乙两地该商品的销售相互独立,该商品售出,供货商获利2万元*/*件;未售出的,供货商亏损 1万元*/*件*.*在(1)的前提下,若仅考虑此供货商所获净利润,试确定最佳配送方案*.*

6*.*[2017郑州市三模,18]为了研究学生的数学核心素养与抽象(能力指标*x*)、推理(能力指标*y*)、建模(能力指标*z*)的相关性,并将它们各自量化为1,2,3三个等级,再用综合指标*w=x+y+z*的值评定学生的数学核心素养:若*w*≥7,则数学核心素养为一级;若5≤*w*≤6,则数学核心素养为二级;若3≤*w*≤4,则数学核心素养为三级*.*为了了解某校学生的数学核心素养,调查人员随机访问了某校10名学生,得到如下结果:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 学生编号 | *A*1 | *A*2 | *A*3 | *A*4 | *A*5 |
| (*x*,*y*,*z*) | (2,2,3) | (3,2,2) | (3,3,3) | (1,2,2) | (2,3,2) |
|  | | | | | |
| 学生编号 | *A*6 | *A*7 | *A*8 | *A*9 | *A*10 |
| (*x*,*y*,*z*) | (2,3,3) | (2,2,2) | (2,3,3) | (2,1,1) | (2,2,2) |

(1)在这10名学生中任取两人,求这两人的建模能力指标相同的概率;

(2)从数学核心素养等级是一级的学生中任取一人,其综合指标为*a*,从数学核心素养等级不是一级的学生中任取一人,其综合指标为*b*,记随机变量*X=a-b*,求随机变量*X*的分布列及其数学期望*.*

**答案**

id:2147494956;FounderCES

1*.*A根据题意,得*E*(*ξi*)*=pi*,*D*(*ξi*)*=pi*(1*-pi*),*i=*1,2,*∵*0*<p*1*<p*2*<*,∴*E*(*ξ*1)*<E*(*ξ*2)*.*令*f*(*x*)*=x*(1*-x*),则*f*(*x*)在(0,)上单调递增,所以*f*(*p*1)*<f*(*p*2),即*D*(*ξ*1)*<D*(*ξ*2),故选A*.*

2*.*B由题意可知,*X*的所有可能取值为0,1,2,3*.*

① 8个顶点处的8个小正方体涂有3面,所以*P*(*X=*3)*=*;

②每一条棱上除了两个顶点处的小正方体,还剩下3个,一共有3*×*12*=*36(个)小正方体涂有2面,所以*P*(*X=*2)*=*;

③每个表面去掉四条棱上的16个小正方形,还剩下9个小正方形,因此一共有9*×*6*=*54(个)小正方体涂有一面,所以*P*(*X=*1)*=.*

④去掉①②③所述的小正方体,还剩下125*-*(8*+*36*+*54)*=*27(个)内部的小正方体的6个面都没有涂油漆,所以*P*(*X=*0)*=.*

故*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

因此*E*(*X*)*=*0*×+*1*×+*2*×+*3*×=.*故选B*.*

3*.*由题意设*P*(*ξ=*1)*=p*,则*ξ*的分布列如下:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *ξ* | 0 | 1 | 2 |
| *P* |  | *p* | *-p* |

由*E*(*ξ*)*=*1,可得*p=*,所以*D*(*ξ*)*=*12*×+*02*×+*12*×=.*

4*.*(Ⅰ)记事件*A*:“甲第一轮猜对”,记事件*B*:“乙第一轮猜对”,

记事件*C*:“甲第二轮猜对”,记事件*D*:“乙第二轮猜对”,

记事件*E*:“‘星队’至少猜对3个成语”*.*

由题意,*E=ABCD+BCD+ACD+ABD+ABC.*

由事件的独立性与互斥性,得

*P*(*E*)*=P*(*ABCD*)*+P*(*BCD*)*+P*(*ACD*)*+P*(*ABD*)*+P*(*ABC*)

*=P*(*A*)*P*(*B*)*P*(*C*)*P*(*D*)*+P*()*P*(*B*)*P*(*C*)*P*(*D*)*+P*(*A*)*P*()*P*(*C*)*P*(*D*)*+P*(*A*)*P*(*B*)*P*()*P*(*D*)*+*

*P*(*A*)*P*(*B*)*P*(*C*)*P*()

*=×××+*2*×*(*×××+×××*)

*=.*

所以“星队”至少猜对3个成语的概率为*.*

(Ⅱ)由题意知,随机变量*X*可能的取值为0,1,2,3,4,6*.*

由事件的独立性与互斥性,得

*P*(*X=*0)*=×××=*,

*P*(*X=*1)*=*2*×*(*×××+×××*)*==*,

*P*(*X=*2)*=×××+×××+×××+×××=*,

*P*(*X=*3)*=×××+×××==*,

*P*(*X=*4)*=*2*×*(*×××+×××*)*==*,

*P*(*X=*6)*=×××==.*

可得随机变量*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| *P* |  |  |  |  |  |  |

所以数学期望*EX=*0*×+*1*×+*2*×+*3*×+*4*×+*6*×=.*

id:2147494987;FounderCES

**A组基础题**

1*.*(1)当*S*6*=*20时,即背诵6首后,正确的有4首,错误的有2首*.*

由*Si*≥0(*i=*1,2,3)可知,若第一首和第二首背诵正确,则其余4首可任意背诵正确2首;

若第一首背诵正确,第二首背诵错误,第三首背诵正确,则其余3首可任意背诵正确2首*.*

则所求的概率*P=*()2*×*()2*×*()2*+×××*()2*×=.*

(2)由题意知,*ξ=|S*5*|*的所有可能的取值为10,30,50,又*p=*,

∴*P*(*ξ=*10)*=*()3*×*()2*+*()2*×*()3*=*,

*P*(*ξ=*30)*=*()4*×*()1*+*()1*×*()4*=*,

*P*(*ξ=*50)*=*()5*×*()0*+*()0*×*()5*=*,

∴*ξ*的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *ξ* | 10 | 30 | 50 |
| *P* |  |  |  |

∴*E*(*ξ*)*=*10*×+*30*×+*50*×=.*

2*.*(1)设下周一无雨的概率为*p*,由题意得*p*2*=*0*.*36,解得*p=*0*.*6,

基地收益*X*的可能取值为20,15,10,7*.*5,则*P*(*X=*20)*=*0*.*36,*P*(*X=*15)*=*0*.*24,*P*(*X=*10)*=*0*.*24,*P*(*X=*7*.*5)*=*0*.*16*.*

∴基地收益*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 20 | 15 | 10 | 7*.*5 |
| *P* | 0*.*36 | 0*.*24 | 0*.*24 | 0*.*16 |

*E*(*X*)*=*20*×*0*.*36*+*15*×*0*.*24*+*10*×*0*.*24*+*7*.*5*×*0*.*16*=*14*.*4(万元),

∴基地的预期收益为14*.*4万元*.*

(2)设基地额外聘请工人时的收益为*Y*万元,

则其预期收益*E*(*Y*)*=*20*×*0*.*6*+*10*×*0*.*4*-a=*16*-a*(万元),

*E*(*Y*)*-E*(*X*)*=*1*.*6*-a*(万元),

综上,当额外聘请工人的成本高于1*.*6万元时,不额外聘请工人;当成本低于1*.*6万元时,额外聘请工人;当成本恰为1*.*6万元时,额外聘请或不聘请工人均可以*.*

3*.*(1)因为*f*(*x*)*=*

所以(*-*0*.*4)*+*(*-*0*.*4)*+*(*-*0*.*4)*+*(*-+b*)*+*(*-+b*)*=*1,解得*b=*1*.*9*.*

估计该班的考试平均分数为

(*-*0*.*4)*×*55*+*(*-*0*.*4)*×*65*+*(*-*0*.*4)*×*75*+*(*-+*1*.*9)*×*85*+*(*-+*1*.*9)*×*95*=*76*.*

(2)由题意可知,考试成绩记为1分,2分,3分,4分,5分的频率分别是0*.*1,0*.*2,0*.*3,0*.*3,0*.*1,按分层抽样的方法分别从考试成绩记为1分,2分,3分的学生中抽出1人,2人,3人,再从这6人中抽出3人,所以*P*(*ξ=*7)*==.*

(3)由(2)知,*ξ*的所有可能取值为5,6,7,8,9,

则*P*(*ξ=*5)*==*,*P*(*ξ=*6)*==*,*P*(*ξ=*7)*=*,*P*(*ξ=*8)*==*,*P*(*ξ=*9)*==.*

所以*ξ*的分布列为

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *ξ* | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *P* |  |  |  |  |  |

*E*(*ξ*)*=*5*×+*(6*+*7*+*8)*×+*9*×=*7*.*

**B组提升题**

4*.*(1)2*×*2列联表如下:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 积极型 | 懈怠型 | 总计 |
| 男 | 13 | 7 | 20 |
| 女 | 8 | 12 | 20 |
| 总计 | 21 | 19 | 40 |

∴*K*2*=*≈2*.*506*<*2*.*706,

∴没有90*%*的把握认为“评定类型”与“性别”有关*.*

(2)由已知得,小明这40位好友中,该天行走的步数超过10 000步的人中男性有6人,女性有2人,现从中抽取3人,抽取的女性人数*X*服从超几何分布,*X*的所有可能取值为0,1,2,

则*P*(*X=*0)*==*,*P*(*X=*1)*==*,*P*(*X=*2)*==*,

∴*X*的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* |  |  |  |

∴*E*(*X*)*=*0*×+*1*×+*2*×=.*

5*.*(1)由表格可知,当甲地不缺货的概率大于0*.*7时,至少需配货5件;乙地不缺货的概率大于0*.*7时,至少需配货4件,所以共有两种方案:甲地配5件,乙地配5件;甲地配6件,乙地配4件*.*

(2)方案一:当甲地配5件,乙地配5件时,记供货商从甲地所获利润为*X*1万元,供货商从乙地所获利润为*Y*1万元,则*X*1,*Y*1的分布列分别为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X*1 | 7 | 10 |
| *P* | 0*.*5 | 0*.*5 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y*1 | 4 | 7 | 10 |
| *P* | 0*.*6 | 0*.*3 | 0*.*1 |

*E*(*X*1)*=*7*×*0*.*5*+*10*×*0*.*5*=*8*.*5(万元),

*E*(*Y*1)*=*4*×*0*.*6*+*7*×*0*.*3*+*10*×*0*.*1*=*5*.*5(万元),

所以选择方案一时,此供货商所获净利润的期望为

*E*(*X*1)*+E*(*Y*1)*=*8*.*5*+*5*.*5*=*14(万元)*.*

方案二:当甲地配6件,乙地配4件时,记供货商从甲地所获利润为*X*2万元,供货商从乙地所获利润为*Y*2万元,则*X*2,*Y*2的分布列分别为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X*2 | 6 | 9 | 12 |
| *P* | 0*.*5 | 0*.*3 | 0*.*2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Y*2 | 5 | 8 |
| *P* | 0*.*6 | 0*.*4 |

*E*(*X*2)*=*6*×*0*.*5*+*9*×*0*.*3*+*12*×*0*.*2*=*8*.*1(万元),

*E*(*Y*2)*=*5*×*0*.*6*+*8*×*0*.*4*=*6*.*2(万元),

所以选择方案二时,此供货商所获净利润的期望为

*E*(*X*2)*+E*(*Y*2)*=*8*.*1*+*6*.*2*=*14*.*3(万元)*.*

综上,仅考虑此供货商所获净利润,选择方案二更佳*.*

6*.*(1)由题意可知,建模能力指标为1的学生是*A*9;建模能力指标为2的学生是*A*2,*A*4,*A*5,*A*7,*A*10;建模能力指标为3的学生是*A*1,*A*3,*A*6,*A*8*.*

记“所取的两人的建模能力指标相同”为事件*A*,

则*P*(*A*)*==.*

(2)由题意可知,数学核心素养等级是一级的有:*A*1,*A*2,*A*3,*A*5,*A*6,*A*8,数学核心素养等级不是一级的有:*A*4,*A*7,*A*9,*A*10*.*

*X*的所有可能取值为1,2,3,4,5*.*

*P*(*X=*1)*==*;

*P*(*X=*2)*==*;

*P*(*X=*3)*==*;

*P*(*X=*4)*==*;

*P*(*X=*5)*==.*

∴随机变量*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *P* |  |  |  |  |  |

∴*E*(*X*)*=*1*×+*2*×+*3*×+*4*×+*5*×=.*